



全品
素养
优练

SQUANPIN
UYANGYOULIAN

题型专项

题型分阶 + 考点专项

高中
数学
全国版

主编：肖德好



延边教育出版社



CONTENTS

夯 实 练

【第一部分 小题夯实练】

训练 1 集合与常用逻辑用语、不等式	001	训练 10 数列	017
训练 2 函数	003	训练 11 滚动训练 [训练 1~10]	019
训练 3 滚动训练 [训练 1~2]	005	训练 12 空间向量与立体几何	021
训练 4 一元函数的导数及其应用	007	训练 13 滚动训练 [训练 1~12]	023
训练 5 滚动训练 [训练 1~4]	009	训练 14 平面解析几何	025
训练 6 三角函数、解三角形	010	训练 15 滚动训练 [训练 1~14]	027
训练 7 滚动训练 [训练 1~6]	012	训练 16 概率与统计	029
训练 8 平面向量、复数	014	训练 17 滚动训练 [训练 1~16]	031
训练 9 滚动训练 [训练 1~8]	015		

【第二部分 解答夯实练】

训练 18 函数与导数 (A)	033
训练 19 函数与导数 (B)	035
训练 20 三角函数与解三角形 (A)	037
训练 21 三角函数与解三角形 (B)	039
训练 22 数列 (A)	041
训练 23 数列 (B)	043
训练 24 数列 (C)	045
训练 25 立体几何与空间向量 (A)	047
训练 26 立体几何与空间向量 (B)	049
训练 27 解析几何 (A)	051
训练 28 解析几何 (B)	053
训练 29 解析几何 (C)	055
训练 30 概率统计 (A)	057
训练 31 概率统计 (B)	059
训练 32 概率统计 (C)	061

进阶练

【第三部分 小题进阶练】

训练 33	8 单选 + 3 多选 + 3 填空	063	训练 43	8 单选 + 3 多选 + 3 填空	083
训练 34	8 单选 + 3 多选 + 3 填空	065	训练 44	8 单选 + 3 多选 + 3 填空	085
训练 35	8 单选 + 3 多选 + 3 填空	067	训练 45	8 单选 + 3 多选 + 3 填空	087
训练 36	8 单选 + 3 多选 + 3 填空	069	训练 46	8 单选 + 3 多选 + 3 填空	089
训练 37	8 单选 + 3 多选 + 3 填空	071	训练 47	8 单选 + 3 多选 + 3 填空	091
训练 38	8 单选 + 3 多选 + 3 填空	073	训练 48	8 单选 + 3 多选 + 3 填空	093
训练 39	8 单选 + 3 多选 + 3 填空	075	训练 49	8 单选 + 3 多选 + 3 填空	095
训练 40	8 单选 + 3 多选 + 3 填空	077	训练 50	8 单选 + 3 多选 + 3 填空	097
训练 41	8 单选 + 3 多选 + 3 填空	079	训练 51	8 单选 + 3 多选 + 3 填空	099
训练 42	8 单选 + 3 多选 + 3 填空	081	训练 52	8 单选 + 3 多选 + 3 填空	101

【第四部分 解答进阶练】

训练 53	数列 + 函数与导数 + 立体几何 + 圆锥曲线	103
训练 54	三角 + 立体几何 + 概率统计 + 数列	105
训练 55	概率统计 + 三角 + 圆锥曲线 + 数列	107
训练 56	三角 + 数列 + 立体几何 + 圆锥曲线	109
训练 57	三角 + 数列 + 函数与导数 + 概率统计	111
训练 58	概率统计 + 立体几何 + 圆锥曲线 + 函数与导数	113
训练 59	三角 + 函数与导数 + 圆锥曲线 + 概率统计	115
训练 60	数列 + 函数与导数 + 概率统计 + 立体几何	117
训练 61	函数与导数 + 数列 + 立体几何 + 圆锥曲线	119
训练 62	数列 + 概率统计 + 立体几何 + 函数与导数	121
训练 63	三角 + 函数与导数 + 立体几何 + 圆锥曲线	123
训练 64	数列 + 三角 + 圆锥曲线 + 概率统计	125
训练 65	三角 + 数列 + 圆锥曲线 + 概率统计	127
训练 66	三角 + 概率统计 + 立体几何 + 函数与导数	129
训练 67	数列 + 立体几何 + 函数与导数 + 创新题型	131

参考答案	133
------	-----



训练 1 集合与常用逻辑用语、不等式 (时间:40 分钟 满分:73 分)

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 2x - 3 > 0\}$, 则 $\complement_{\mathbb{R}} A =$ ()

- A. $[-1, 3]$
- B. $(-1, 3)$
- C. $(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$
- D. $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

2. 已知集合 $A = \{x | x - a \geqslant 0\}$, $B = \{x | y = \sqrt{4x - 8}\}$, 若 $A \subseteq B$, 则 a 的值可以是 ()

- A. -4
- B. -1
- C. 1
- D. 4

3. 已知命题 $p: \forall x > 1, \ln x > \frac{1}{3} - \frac{1}{3x^3}$, 则 $\neg p$ 为 ()

- A. $\forall x > 1, \ln x \leqslant \frac{1}{3} - \frac{1}{3x^3}$
- B. $\exists x \leqslant 1, \ln x < \frac{1}{3} - \frac{1}{3x^3}$
- C. $\exists x \leqslant 1, \ln x \leqslant \frac{1}{3} - \frac{1}{3x^3}$
- D. $\exists x > 1, \ln x \leqslant \frac{1}{3} - \frac{1}{3x^3}$

4. 设 m, n 为实数, 则“ $\log_2 \frac{1}{m} > \log_2 \frac{1}{n}$ ”是“ $0.1^m > 0.1^n$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

5. 已知 $a > b > 0$, 则 $\frac{b^2 + a^2}{ab - b^2}$ 的最小值为 ()

- A. 2
- B. $1 + 2\sqrt{2}$
- C. 4
- D. $2 + 2\sqrt{2}$

6. 若关于 x 的不等式 $kx^2 + (k-6)x + 2 > 0$ 的解集为 $\mathbb{R}$, 则实数 k 的取值范围是 ()

- A. $2 \leqslant k \leqslant 18$
- B. $-18 < k < -2$
- C. $2 < k < 18$
- D. $0 < k < 2$

7. 已知 $a > 0, b > 0$, 直线 $(a-1)x + y - 1 = 0$ 和 $x + 2by + 1 = 0$ 垂直, 则 $\frac{2}{a} + \frac{1}{b}$ 的最小值为 ()

- A. 16
- B. 8
- C. 4
- D. 2

8. 集合 $M = \{x | x = 5k - 2, k \in \mathbb{Z}\}$, $P = \{x | x = 5n + 3, n \in \mathbb{Z}\}$, $S = \{x | x = 10m + 3, m \in \mathbb{Z}\}$ 的关系是 ()

- A. $S \subseteq P \subseteq M$
- B. $S = P \subseteq M$
- C. $S \subseteq P = M$
- D. $P = M \subseteq S$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知集合 $A = \{x | x \leq 3\}$, 集合 $B = \{x | x \leq m + 1\}$, 则使 $A \cap B = A$ 成立的充分不必要条件可以为 ()

- A. $m > 0$ B. $m > 1$
C. $m > 3$ D. $m > 4$

10. 下列说法正确的是 ()

A. 不等式 $4x^2 - 5x + 1 > 0$ 的解集是 $\left\{x \mid x > \frac{1}{4} \text{ 或 } x < -1\right\}$

B. 不等式 $2x^2 - x - 6 \leq 0$ 的解集是 $\left\{x \mid x \leq -\frac{3}{2} \text{ 或 } x \geq 2\right\}$

C. 若 $ax^2 + 2ax + 1 \geq 0$ 恒成立, 则 a 的取值范围为 $[0, 1]$

D. 若关于 x 的不等式 $2x^2 + px - 3 < 0$ 的解集是 $(q, 1)$, 则 $p + q$ 的值为 $-\frac{1}{2}$

11. 已知正数 x, y 满足 $x + 2y = 1$, 则下列说法正确的是 ()

A. xy 的最大值为 $\frac{1}{8}$

B. $x^2 + 4y^2$ 的最小值为 $\frac{1}{2}$

C. $\sqrt{x} + \sqrt{2y}$ 的最大值为 $2\sqrt{3}$

D. $\frac{1}{x} + \frac{3}{y}$ 的最小值为 $7 + 2\sqrt{6}$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 命题“对任意 $x \in [1, 3], a \leq 2^x + 2^{-x}$ ”为假命题, 则实数 a 的取值范围是_____.

13. 若 $\{x | 0 \leq x \leq 1\} \cap \{x | x^2 - 2x + m > 0\} = \emptyset$, 则实数 m 的取值范围为_____.

14. 在下列关于实数 a, b 的四个不等式中, 恒成立的是_____. (填序号)

① $a + b \geq 2\sqrt{ab}$;

② $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geq ab$;

③ $|a| - |b| \leq |a - b|$;

④ $a^2 + b^2 \geq 2b - 1$.

训练2 函数 (时间:40分钟 满分:73分)

一、选择题:本题共8小题,每小题5分,共40分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

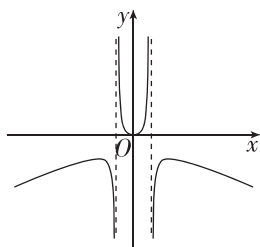
1. 函数 $f(x) = \ln x + x^2 - 2$ 的零点所在区间是 ()

A. $(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ B. $(\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$
C. $(1, \sqrt{2})$ D. $(\sqrt{2}, 2)$

2. 已知 $a = \log_{\sqrt{3}} 2, b = \log_2 \frac{\sqrt{2}}{2}, c = (\frac{1}{3})^{\frac{1}{3}}$, 则 ()

A. $a > b > c$ B. $c > b > a$
C. $a > c > b$ D. $b > c > a$

3. 已知函数 $f(x)$ 的部分图象如图所示, 则函数 $f(x)$ 的解析式可能为 ()



A. $f(x) = -\frac{2x^2}{|x|-1}$ B. $f(x) = -\frac{2x^2}{|x|+1}$
C. $f(x) = -\frac{2x}{|x|-1}$ D. $f(x) = -\frac{2|x|}{x^2-1}$

4. 已知函数 $f(x) = \frac{a-e^x}{1+ae^x} \cdot \sin x$, 则“函数 $f(x)$

的图象关于 y 轴对称”是“ $a=1$ ”的 ()
A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件

5. 已知偶函数 $f(x)$ 对于任意 $x \in \mathbf{R}$ 都有 $f(x+2) = f(x)$, 且 $f(x)$ 在区间 $[0, 1]$ 上单调递增, 则 $f(-6.5), f(-1), f(0)$ 的大小关系是 ()

A. $f(-1) < f(0) < f(-6.5)$
B. $f(-6.5) < f(0) < f(-1)$
C. $f(-1) < f(-6.5) < f(0)$
D. $f(0) < f(-6.5) < f(-1)$

6. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4x-4}, & x \leq \frac{3}{4}, \\ \log_a(4x) - 1, & x > \frac{3}{4} \end{cases}$ 是 $\mathbf{R}$ 上的

单调函数, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(0, 1)$ B. $(1, \sqrt{3}]$
C. $(1, \sqrt{3})$ D. $(1, 3)$

7. 若函数 $f(x) = |x^2 - (m-2)x + 1|$ 在 $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

上单调, 则实数 m 的取值范围为 ()

A. $[\frac{1}{2}, 1] \cup [3, \frac{9}{2}]$
B. $[\frac{1}{2}, 2] \cup [3, \frac{9}{2}]$
C. $[-\frac{1}{2}, 1] \cup [3, \frac{9}{2}]$
D. $[-\frac{1}{2}, 2] \cup [3, \frac{9}{2}]$

8. 若函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$, 其图象关于点 $(2, 2)$ 对称, 且 $f(x+1)$ 是偶函数, 则 $f(0) + f(1) + f(2) + \dots + f(2024) =$ ()

A. 2024 B. -2024
C. 4050 D. -4050

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 $2^a = 5^b = 10$, 则下列说法正确的是 ()

A. $e^{a-b} > 1$

B. $a + b < ab$

C. $a + 4b < 9$

D. $\left(\frac{1}{a} + 1\right)^2 + \left(\frac{1}{b} + 2\right)^2 > 8$

10. 已知定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足 $f(1+x) + f(1-x) = 0$, 且 $f(x)$ 不是常函数, 则下列说法中正确的是 ()

A. 若 2 为 $f(x)$ 的周期, 则 $f(x)$ 为奇函数

B. 若 $f(x)$ 为奇函数, 则 2 为 $f(x)$ 的周期

C. 若 4 为 $f(x)$ 的周期, 则 $f(x)$ 为偶函数

D. 若 $f(x)$ 为偶函数, 则 4 为 $f(x)$ 的周期

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 4x - x^2, & x \geq 0, \\ 3^{-x} - 1, & x < 0, \end{cases}$ 若 $f(a) =$

$f(b) = f(c) = \lambda$, 且 $a < b < c$, 则 ()

A. $f[f(-2)] = -32$

B. 函数 $g(x) = f(x) - f(\lambda)$ 有 2 个零点

C. $a + b + c \in \left(4 + \log_3 \frac{1}{5}, 4\right)$

D. $abc \in (-4\log_3 5, 0)$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 已知函数 $f(2x+1)$ 的定义域为 $[-1, 1)$, 则函数 $f(1-x)$ 的定义域为_____.

13. 已知函数 $f(x) = \lg(x^2 + ax + 1)$ 在区间 $(-\infty, -2)$ 上单调递减, 则实数 a 的取值范围为_____.

14. 设 a, b 分别是方程 $\log_2 x + x + 2 = 0$ 与 $2^x + x + 2 = 0$ 的根, 则 $a + b =$ _____.



训练 18 函数与导数(A) (时间:40 分钟 满分:60 分)

1. (13 分) 已知函数 $f(x) = ax - \ln x$, 且 $f(x)$ 的图象在 $x=1$ 处的切线方程是 $x - y + b = 0$.
- (1) 求实数 a, b 的值;
- (2) 求函数 $f(x)$ 的单调区间和极值.
2. (15 分) 已知函数 $f(x) = ax^2 - bx + \ln x (a, b \in \mathbf{R})$.
- (1) 若 $a = 1, b = 3$, 求函数 $f(x)$ 的单调区间及极值;
- (2) 若 $b = 0$, 不等式 $f(x) \leq 0$ 在 $[1, +\infty)$ 上恒成立, 求 a 的取值范围.

3. (15 分) 已知函数 $f(x) = (x+1)\ln x - ax + 2$.

(1) 当 $a=1$ 时, 求 $f(x)$ 的图象在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 若函数 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 求实数 a 的取值范围.

4. (17 分) 已知函数 $f(x) = x^3 + 2ax^2 + bx + a - 1$ 在 $x = -1$ 处取得极值 0, 其中 $a, b \in \mathbf{R}$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 讨论函数 $f(x)$ 在 $[-1, 2]$ 上的单调性;

(3) 当 $x \in [-1, 2]$ 时, 方程 $f(x) = k$ 有两个不相等的实数根, 求实数 k 的取值范围.

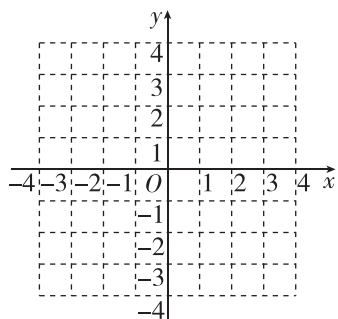
训练 19 函数与导数(B) (时间:40 分钟 满分:60 分)

1. (13 分) 已知函数 $f(x) =$

$$\begin{cases} 2^x - 1, & x \leq 0, \\ \log_{\frac{1}{2}}(x+1), & 0 < x < 1, \text{ 且 } f(4) = 14. \\ x^m - 2, & x \geq 1, \end{cases}$$

(1) 求实数 m 的值, 在图中作出 $f(x)$ 的图象, 并求函数 $g(x) = f(x) - b$ 有三个不同的零点时实数 b 的取值范围;

(2) 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a+3, a^2+a+1]$ 上单调递增, 求实数 a 的取值范围.



2. (15 分) 已知函数 $f(x) = e^{2x} - ax (a \in \mathbf{R})$.

(1) 讨论 $f(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 存在最小值, 且最小值为 m , 求证: $m \leq 1$.

3. (15 分) 已知函数 $f(x) = \log_a(x-1) + 2$ ($a > 0$ 且 $a \neq 1$) 的图象过点 $(3, 3)$.

(1) 求实数 a 的值;

(2) 解关于 x 的不等式 $f(2^x - 3) < f(21 - 2^{x+1})$.

(3) 判断函数 $g(x) = f(x) - \frac{1}{x} - 2$ 的零点个数.

4. (17 分) 已知函数 $f(x) = ax^2 - 2|x| + a - 2$.

(1) 当 $a = 1$ 时, 求方程 $f(x) = -1$ 的解所构成的集合;

(2) 设 $f(x)$ 在 $[1, 2]$ 上的最小值为 $g(a)$, 求 $g(a)$ 的解析式.





训练 33 8 单选+3 多选+3 填空 (时间:45 分钟 满分:73 分)

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $U=\{0,1,2,3\}$, $A=\{0,1\}$, $B=\{1,2\}$,

则 $(\complement_U A) \cap B =$ ()

- A. $\{2\}$ B. $\{4\}$
C. $\{1,3\}$ D. $\{5,6\}$

2. 若 $z=(|\sqrt{3}-i|+i)(1+i^3)$, 则 z 的共轭复数为

()

- A. $3+i$ B. $3-i$
C. $1+3i$ D. $1-3i$

3. 已知向量 $a=(1,-1)$, $b=(0,t)$, 若 $a \perp (a+2b)$, 则 $|b| =$ ()

- A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ B. 1
C. $\sqrt{2}$ D. 2

4. 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别是 a, b, c

且 $a=3, b=\sqrt{3}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, 则 $c =$ ()

- A. $\sqrt{3}$ B. $\sqrt{21}$
C. $\sqrt{3}$ 或 $\sqrt{21}$ D. $\sqrt{6}$

5. 设数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项之积为 T_n , 已知 T_n 满足

$a_n+2T_n=1 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则 $T_{2024} =$ ()

A. $-\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{2023} + \frac{1}{2}$ B. 4049

C. $\frac{1}{4049}$ D. $\frac{4047}{4049}$

6. 若 $(x+1)(2x+1)(2^2x+1)\cdots(2^{n-1}x+1) =$

$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n (n \in \mathbf{N}^*)$, 设 $b_n = a_1$, 则数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 ()

- A. 2^n-1 B. $2^{n+1}-n-2$
C. $2^{n+1}-2$ D. $2^{n+2}-2n-4$

7. 已知 F_1, F_2 分别是双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a>0, b>0)$ 的左、右焦点, 过点 F_2 作双曲线 C 的一条

渐近线的垂线, 垂足为 P , 且 $|PF_1|^2 + |PF_2|^2 = 8b^2$, 则双曲线 C 的离心率为 ()

- A. $\frac{5}{3}$ B. $\frac{5}{4}$
C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

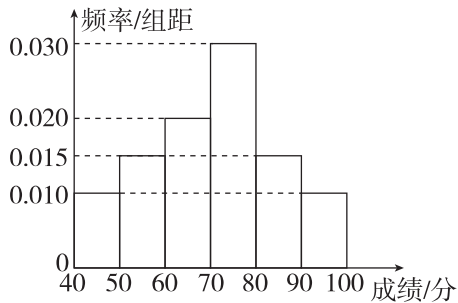
8. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2-ax, & x \leq 1, \\ \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}ax^2 + (2a^2+2)x - \frac{11}{6}, & x > 1, \end{cases}$

若对任意 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) - f(x_2) < 2x_1 - 2x_2$, 则实数 a 的取值范围是 ()

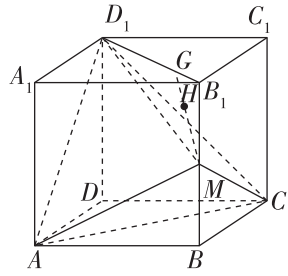
- A. $(-\infty, -2)$ B. $[1, +\infty)$
C. $(-2, \frac{1}{2}]$ D. $(-\infty, -\frac{3}{4}]$

二、选择题：本题共 3 小题，每小题 6 分，共 18 分. 在每小题给出的选项中，有多项符合题目要求，全部选对的得 6 分，部分选对的得部分分，有选错的得 0 分.

9. 某中学举行高中数学素养测试，对 80 名考生的成绩(单位：分)进行统计，得到如图所示的频率分布直方图，则 ()



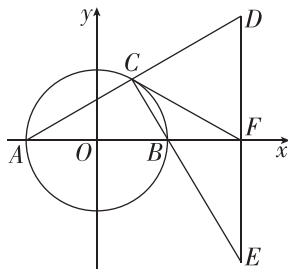
- A. 成绩的极差一定大于 40，不超过 60
 B. 成绩在 $[90, 100]$ 内的考生人数为 8
 C. 成绩的众数一定落在区间 $[70, 80)$ 内
 D. 成绩的中位数一定落在区间 $[70, 80)$ 内
10. 某学校举办丰富多彩的校园文化活动，同学们需要从主持人给出的 4 个校园景观和 2 个植物名称的名词牌中随机选出 2 个，结合自己的语言完成连词成句. 记事件 A = “该同学选出的两个名词牌中至少有一个是校园景观”，事件 B = “该同学选出的两个名词牌中至少有一个是植物名称”. 则下列说法正确的是 ()
- A. 事件 A 发生的概率 $P(A) = \frac{14}{15}$
 B. 事件 $\bar{A}$ 与事件 B 互斥
 C. $P(A|\bar{B}) = 1$
 D. $P(A|B) = P(B|A)$
11. 如图所示，在棱长为 2 的正方体中， M 为 BB_1 的中点， G 为 D_1B_1 上靠近 B_1 的四等分点， H 为线段 MG 上的一个动点，则 ()



- A. 三棱锥 $H-D_1AC$ 的体积为定值
 B. $\angle AMC = \angle D_1MC$
 C. DH 的最小值为 $\frac{5\sqrt{3}}{3}$
 D. 若 $\overrightarrow{HG} = \lambda \overrightarrow{HB_1} + \mu \overrightarrow{HD_1}$ ($\lambda, \mu \in \mathbf{R}$), 则 $\lambda - \mu = \frac{1}{2}$

三、填空题：本题共 3 小题，每小题 5 分，共 15 分.

12. 若函数 $f(x) = 2\cos\left(\omega x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($\omega > 0$) 在 $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ 上单调，则 ω 的取值范围为 _____.
13. 《九章算术》中将正四棱台称为方亭，现有方亭 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$, $AB = 3A_1B_1 = 6$, 体积为 $\frac{52\sqrt{5}}{3}$, 则该方亭的高是 _____.
14. 如图， $\odot O: x^2 + y^2 = 4$ 与 x 轴交于 A, B 两点， C 在 $\odot O$ 上且在第一象限内， D, E 分别在射线 AC, CB 上， DE 交 x 轴于点 F . 若直线 DE 的方程为 $x = 4$, F 是线段 DE 的中点，则直线 CF 的方程为 _____.



训练 34 8 单选+3 多选+3 填空 (时间:45 分钟 满分:73 分)

一、选择题:本题共 8 小题,每小题 5 分,共 40 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1. 已知数据 $4x_1+1, 4x_2+1, \dots, 4x_{10}+1$ 的平均数和方差分别为 4, 10, 那么数据 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 的平均数和方差分别为 ()

A. $-1, \frac{5}{2}$ B. $1, \frac{5}{2}$
C. $1, \frac{3}{2}$ D. $\frac{3}{4}, \frac{5}{8}$

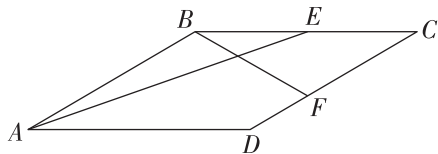
2. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1, a_2=1$, 且 $a_n=a_{n-1}+3a_{n-2}+2(n \geq 3)$, 则 $a_4=$ ()

A. 13 B. 9
C. 11 D. 7

3. 已知直线 a, m, n, l , 且 m, n 为异面直线, $m \perp$ 平面 $\alpha, n \perp$ 平面 β . 若 l 满足 $l \perp m, l \perp n$, 则下列说法中正确的是 ()

A. $l // \alpha$
B. $l \perp \beta$
C. 若 $\alpha \cap \beta = a$, 则 $a // l$
D. $\alpha \perp \beta$

4. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, $AD=2\sqrt{3}$, $\cos \angle BAD = \frac{\sqrt{3}}{2}$, E 是边 BC 的中点, F 是边 CD 上靠近点 D 的三等分点, 若 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{BF} = 6$, 则 $|\overrightarrow{AB}| =$ ()

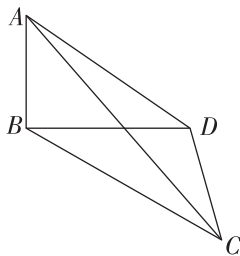


A. 4 B. 3
C. $2\sqrt{3}$ D. $3\sqrt{2}$

5. 过定点 A 的直线 $ax+y-2=0$ 与过定点 B 的直线 $x-ay+4a-2=0$ 交于点 P (P 与 A, B 不重合), 则 $\triangle PAB$ 的面积的最大值为 ()

A. $\sqrt{2}$ B. $2\sqrt{2}$
C. 2 D. 4

6. 如图, 在平面四边形 $ABCD$ 中, $BC=2AB=4$, $AC=2\sqrt{7}, AB \perp BD, \angle BCD = \frac{\pi}{4}$, 则 $BD =$ ()



A. $\sqrt{3}$ B. 2
C. $2\sqrt{6}-2\sqrt{2}$ D. $4\sqrt{3}-4$

7. 已知 $a > 0, b > 0$, 则下列选项中, 能使 $4a+b$ 取得最小值 25 的为 ()

A. $ab=36$ B. $ab=9a+b$
C. $a^2+b=21$ D. $16a^2+b^2=625$

8. 已知函数 $f(x) = xe^{-x}, g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \ln x + a$, 若 $\exists x_1, x_2 \in [1, 2]$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$, 则实数 a 的取值范围是 ()

A. $(\frac{2}{e^2} + \ln 2 - 2, \frac{1}{e} - \frac{1}{2})$
B. $[\frac{2}{e^2} + \ln 2 - 2, \frac{1}{e} - \frac{1}{2}]$
C. $(\frac{1}{2} - \frac{1}{e}, \frac{2}{e^2} - \ln 2 + 2)$
D. $[\frac{1}{2} - \frac{1}{e}, \frac{2}{e^2} - \ln 2 + 2]$

二、选择题: 本题共 3 小题, 每小题 6 分, 共 18 分. 在每小题给出的选项中, 有多项符合题目要求, 全部选对的得 6 分, 部分选对的得部分分, 有选错的得 0 分.

9. 已知 z_1, z_2 是两个虚数, 则下列结论中正确的是

()

A. 若 $z_1 = \overline{z_2}$, 则 $z_1 + z_2$ 与 $z_1 z_2$ 均为实数

B. 若 $z_1 + z_2$ 与 $z_1 z_2$ 均为实数, 则 $z_1 = \overline{z_2}$

C. 若 z_1, z_2 均为纯虚数, 则 $\frac{z_1}{z_2}$ 为实数

D. 若 $\frac{z_1}{z_2}$ 为实数, 则 z_1, z_2 均为纯虚数

10. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 $a_1 = -10$,

$a_{n+1} = a_n + 3$, 则下列说法正确的是 ()

A. $\{a_n\}$ 是递增数列

B. 10 是数列 $\{a_n\}$ 中的项

C. 数列 $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是等差数列

D. 数列 $\{S_n\}$ 中的最小项为 S_3

11. 若 $0 < a < b < 1$, 则 ()

A. $a + 2\sqrt{b} > b + 2\sqrt{a}$

B. $\cos a > \sin b$

C. $\log_a b > \frac{b}{a}$

D. $\ln a - \ln b < a - b$

三、填空题: 本题共 3 小题, 每小题 5 分, 共 15 分.

12. 设双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的渐近线的

倾斜角为 α , 该双曲线与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 的离心

率之积为 1, 且有相同的焦点, 则 $\sin \alpha =$

_____.

13. 有一个邮件过滤系统, 它可以根据邮件的内容

和发件人等信息, 判断邮件是不是垃圾邮件, 并

将其标记为垃圾邮件或正常邮件. 对这个系统

的测试具有以下结果: 每封邮件被标记为垃圾

邮件的概率为 $\frac{2}{5}$, 被标记为垃圾邮件的邮件有

$\frac{1}{10}$ 的概率是正常邮件, 被标记为正常邮件的邮

件有 $\frac{1}{10}$ 的概率是垃圾邮件, 则垃圾邮件被该系

统成功过滤 (即垃圾邮件被标记为垃圾邮件) 的

概率为 _____.

14. 在多面体 $PABCQ$ 中, P, Q 在平面 ABC 两侧,

$PA = PB = PC = AB = AC = BC = 2$, $QA =$

$QB = QC$ 且 QA, QB, QC 两两垂直, 则该多面

体的外接球的半径为 _____, 内切球的半径

为 _____.

训练 53 数列+函数与导数+立体几何+圆锥曲线

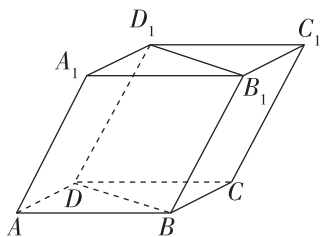
(时间:45 分钟 满分:60 分)

- (13 分) 已知数列 $\{a_n\}$ 是公差不为零的等差数列, 其前 n 项和为 S_n , $S_7 = 49$, 且 a_2, a_5, a_{14} 成等比数列.
 - 求 $\{a_n\}$ 的通项公式;
 - 若数列 $\{a_n + b_n\}$ 是公比为 3 的等比数列, 且 $b_3 = 22$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .
- (15 分) 已知函数 $f(x) = e^x - ax + a$ ($a \in \mathbf{R}, a \neq 0$), $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数.
 - 若 $f(0) = 2$, 求证: $f'(x) + f'(-x) \geq 0$;
 - 若对任意 $x \in [0, 3]$, 都有 $f(x) \geq 0$, 求实数 a 的取值范围.

3. (15 分) 在平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = AD = AA_1 = 1$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \angle BAD = 60^\circ$.

(1) 若空间中有一点 P 满足 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{AA_1}$, 求 $|\overrightarrow{AP}|$;

(2) 求平面 BDD_1B_1 与平面 BCC_1B_1 的夹角的余弦值.



4. (17 分) 已知半径为 $\frac{8}{3}$ 的圆 C 的圆心在 y 轴的正半轴上, 且直线 $12x - 9y - 1 = 0$ 与圆 C 相切.

(1) 求圆 C 的标准方程.

(2) 若 $M(x_0, y_0)$ 是圆 C 上任意一点, 求 $(x_0 + 3)^2 + \left(y_0 - \frac{1}{3}\right)^2$ 的取值范围.

(3) 已知 $A(0, -1)$, P 为圆 C 上任意一点, 试问在 y 轴上是否存在定点 B (异于点 A), 使得 $\frac{|PB|}{|PA|}$ 为定值? 若存在, 求出点 B 的坐标; 若不存在, 请说明理由.

训练 54 三角+立体几何+概率统计+数列

(时间:45 分钟 满分:60 分)

1. (13 分) 设三角形 ABC 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c 且 $\sin(B+C) = 2\sqrt{3} \sin^2 \frac{A}{2}$.

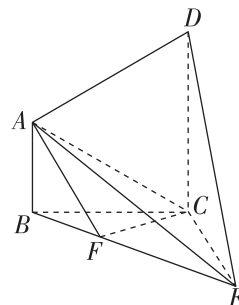
(1) 求角 A 的大小;

(2) 若 $b=3$, BC 边上的高为 $\frac{3\sqrt{21}}{7}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

2. (15 分) 如图, 在四棱锥 $E-ABCD$ 中, $EC \perp$ 平面 $ABCD$, $DC \perp BC$, $AB \parallel DC$, $DC = 2AB = 2$, $CB = CE$, 点 F 在棱 BE 上, 且 $BF = \frac{1}{2}FE$.

(1) 证明: $DE \parallel$ 平面 AFC ;

(2) 当二面角 $F-AC-D$ 为 135° 时, 求 CE 的长.



3. (15分)科技特长生是经过教育厅、教育局发文,有正式定义的、享有特殊招生政策的学生群体,简言之,就是在计算机编程、信息学奥赛、机器人等专业领域中,得到特定比赛或竞赛奖项的学生,可认定为科技特长生.现将两个班的科技特长生报名表分别装进两个档案袋,第一个档案袋中有5份男生档案和3份女生档案,第二个档案袋中有2份男生档案和4份女生档案.

(1)若从第一个档案袋中随机依次取出2人的档案,每次取出的档案不再放回.

(i)求取出的这2人的档案中有女生档案的概率;

(ii)求在取出的这2人的档案中有女生档案的条件下,第2次取出的档案是女生档案的概率.

(2)若先从第一个档案袋中随机取出1人的档案放入第二个档案袋中,再从第二个档案袋中随机取出1人的档案,求从第二个档案袋中取出的档案是女生档案的概率.

4. (17分)若数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足:存在 $k \in \mathbf{N}^*$,对于任意的 $n \in \mathbf{N}^*$,都有 $b_{n+k} = a_n + a_{n+k}$,则称数列 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 成“ k 级关联”.记 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 的前 n 项和分别为 T_n, S_n .

(1)已知 $a_n = 2n, b_n = 2^n, n \in \mathbf{N}^*$,判断 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 是否成“4级关联”,并说明理由;

(2)若数列 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 成“2级关联”,其中 $a_n = \cos \frac{n\pi}{2} + 1, n \in \mathbf{N}^*$,且 $b_1 = 1, b_2 = 2$,求 $T_{2026} - S_{2026}$ 的值.